PUNTO ASTRONOMICO CON CALCOLO ANALITICO DELLE BISETTRICI DI ALTEZZA

di

Franco Martinelli

PREMESSA

Equazione di una retta

L'equazione in forma implicita di una retta nel piano cartesiano è

$$ax + by + c = 0$$

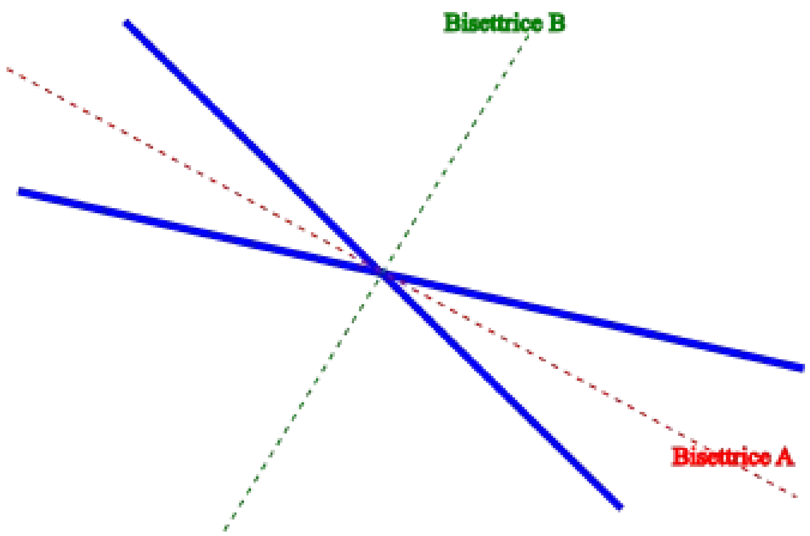
dove **a**, **b**, **c** sono i coefficenti.
L'equazione in forma esplicita è

$$y = mx + q$$

dove
m è il coefficiente angolare che esprime l'angolo di inclinazione della retta rispetto all'asse delle x, ed è pari alla tangente di tale angolo
q la cosiddetta intercetta o ordinata all'origine, cioè il punto di incontro tra la retta e l'asse delle y.

Equazioni delle bisettrici di due rette che si incontrano in un punto

Due rette che si incontrano in un punto danno luogo a due bisettrici, perpendicolari tra loro.



Le formule che esprimono le due bisettrici , espresse in forma implicita, sono.

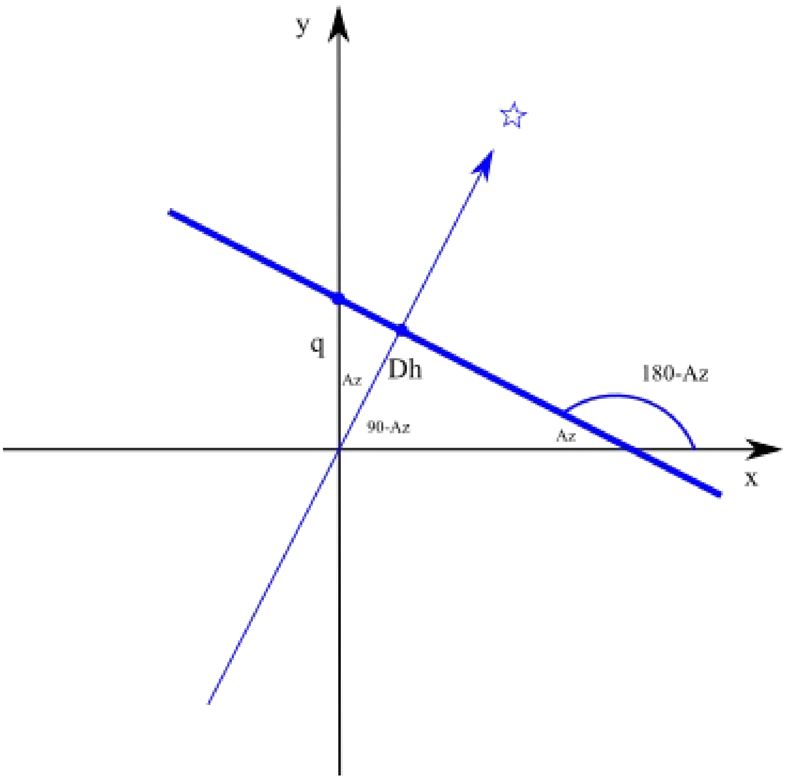
$$\frac{a1\,x + b1\,y + c1}{\sqrt{a1^2 + b1^2}} = + \frac{a2\,x + b2\,y + c2}{\sqrt{a2^2 + b2^2}}$$

$$\frac{a1\,x + b1\,y + c1}{\sqrt{a1^2 + b1^2}} = - \frac{a2\,x + b2\,y + c2}{\sqrt{a2^2 + b2^2}}$$

Le formule sono identiche, essendo l'unica differenza i segni del secondo membro, uno positivo e l'altro negativo.
I coefficienti **a**, **b**, **c** sono i coefficienti impliciti delle equazioni delle due rette incidenti.

PROCEDURA DI CALCOLO

Equazione della retta d'altezza



L'angolo che una retta d'altezza, di azimut Az, forma con l'asse delle ascisse è pari a 180°-Az.
Il coefficiente angolare è dunque

$$m = \tan(180\text{-}az)$$
$$m = -\tan(az)$$

Noto il Dh, l'intercetta è

$$q = Dh / \cos(az)$$

L'equazione in forma esplicita pertanto è

$$y = -\tan(az)\,x + \frac{Dh}{\cos(az)}$$

Con alcuni passaggi

$$y = -\frac{sen(az)}{\cos(az)}\,x + \frac{Dh}{\cos(az)}$$

$$y = \frac{-sen(az)\,x + Dh}{\cos(az)}$$

$$\cos(az)\,y + sen(az)\,x - Dh = 0$$

si ottiene la forma implicita della retta d'altezza

$$\textbf{sen(az)}\boldsymbol{x} + \textbf{cos(az)}\boldsymbol{y} - \textbf{Dh=0}$$

dove

$$a = \text{sen}(az) \qquad b = \cos(az) \qquad c = -Dh$$

sono i coefficienti necessari per il successsivo calcolo delle bisettrici

Calcolo della bisettrice d'altezza

Data una coppia di rette d'altezza, si determinano le equazioni delle due possibili bisettrici d'altezza.

Equazione della prima bisettrice (secondo membro positivo)

Abbiamo visto che l'equazione generica di una prima bisettrice è

$$\frac{a1\,x+b1\,y+c1}{\sqrt{a1^2+b1^2}}=+\frac{a2\,x+b2\,y+c2}{\sqrt{a2^2+b2^2}}$$

che nel caso specifico diventa

$$\frac{\sin(az1)\,x+\cos(az1)\,y-Dh1}{\sqrt{\sin^2(az1)+\cos^2(az1)}}=\frac{\sin(az2)\,x+\cos(az2)\,y-Dh2}{\sqrt{\sin^2(az2)+\cos^2(az2)}}$$

poiché gli argomenti dei radicali, per il principio fondamentale della goniometria, hanno valore pari a 1, si possono omettere e si ottiene

$$\sin(az1)\,x+\cos(az1)\,y-Dh1=\sin(az2)\,x+\cos(az2)\,y-Dh2$$

$$\cos(az1)\,y-\cos(az2)\,y=\sin(az2)\,x-sen(az1)\,x-Dh2+Dh1$$

raccogliendo x e y

$$[\cos(az1)-\cos(az2)]\,y=[\sin(az2)-sen(az1)]\,x-Dh2+Dh1$$

da cui si ottiene l'equazione esplicita di una delle due bisettrici

$$y=\frac{\sin(az2)-\sin(az1)}{\cos(az1)-\cos(az2)}\,x+\frac{Dh1-Dh2}{\cos(az1)-\cos(az2)}$$

dove

$$mb1=\frac{\sin(az2)-\sin(az1)}{\cos(az1)-\cos(az2)}$$

$$qb1=\frac{Dh1-Dh2}{\cos(az1)-\cos(az2)}$$

Equazione della seconda bisettrice (secondo membro negativo)

$$\frac{\sin(az1)\,x+\cos(az1)\,y-Dh1}{\sqrt{\sin^2(az1)+\cos^2(az1)}}=-\frac{\sin(az2)\,x+\cos(az2)\,y-Dh2}{\sqrt{\sin^2(az2)+\cos^2(az2)}}$$

poiché gli argomenti dei radicali, per il principio fondamentale della goniometria, hanno valore pari a 1, si possono omettere e si ottiene

$$\sin(az1)\,x+\cos(az1)\,y-Dh1=-(\sin(az2)\,x+\cos(az2)\,y+Dh2)$$

$$\sin(az1)x+\cos(az1)y-Dh1=-\sin(az2)x-\cos(az2)y-Dh2$$

$$\cos(az1)y+\cos(az2)y=-\sin(az2)x-\sin(az1)x-Dh2+Dh1$$

raccogliendo x e y

$$[\cos(az1)+\cos(az2)]y=[-\sin(az2)-\sin(az1)]x-Dh2+Dh1$$

da cui si ottiene l’equazione esplicita dell’altra bisettrice

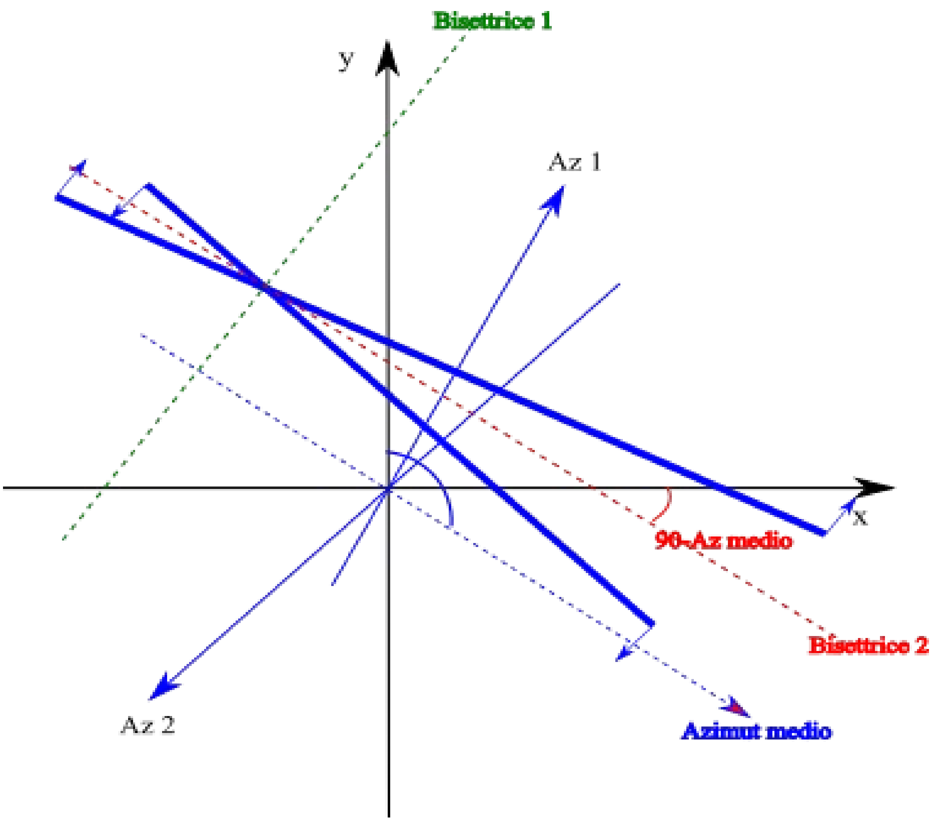
$$y=\frac{-\sin(az2)-\sin(az1)}{\cos(az1)+\cos(az2)}x+\frac{Dh1-Dh2}{\cos(az1)+\cos(az2)}$$

dove

$$mb2=\frac{-\sin(az2)-\sin(az1)}{\cos(az1)+\cos(az2)}$$

$$qb2=\frac{Dh1-Dh2}{\cos(az1)+\cos(az2)}$$

Scelta della bisettrice applicabile
Date le due bisettrici, perpendicolari tra loro come già accennato, occorre scegliere quella giusta. Ricordiamo che i coefficienti angolari delle due bisettrici, essendo tra loro perpendicolari, hanno segno opposto, il che ci favorirà nella scelta



Si osserva che la bisettrice giusta, raffigurata nel disegno in rosso, ha lo stesso orientamento della media degli azimut delle due rette d’altezza.

$$azMed° = \frac{az1 + az2}{2}$$

e forma con l’asse delle x l’angolo

$$mMed° = 90° - azMed°$$

Il coefficiente angolare della bisettrice da utilizzare dovrà essere uguale a

$$mMed = \tan(mMed°)$$

Sarà necessario dunque calcolare entrambe le bisettrici, non sapendo a priori quale sia quella giusta e, notii coefficienti m1 e m2 delle due bisettrici, scegliere quella il cui coefficiente è uguale a quello desunto con l’azimut medio.
Se i calcoli vengono effettuati “a mano” la scelta della bisettrice è immediata in quanto i numeri sono direttamente osservabili e confrontabili.
Se il calcolo viene eseguito in forma automatica, cioè con un programma o con un foglio di calcolo, la scelta è opportuno che si basi solo sulla concordanza del segno tra il coefficiente mMed e uno dei due coefficienti m1 e m2, oppure solo sulla parte intera del coefficiente, trascurando la parte decimale.
Questo perché trattandosi di numeri irrazionali il confronto di uguaglianza tra due numeri da parte di un programma potrebbe dare un falso negativo, in funzione del livello di precisione che il computer utilizza nel rappresentare internamente i numeri.

Punto di incontro tra le bisettrici
Con due coppie di rette d’altezza si ottengono complessivamente due bisettrici b1 e b2 (una per ogni coppia), le cui equazioni vanno messe a sistema

$$y = mb1x + qb1$$
$$y = mb2x + qb2$$

risolvendo per confronto

$$mb1x + qb1 = mb2x + qb2$$

$$mb1x - mb2x = qb2 - qb1$$

$$x(mb1 - mb2) = qb2 - qb1$$

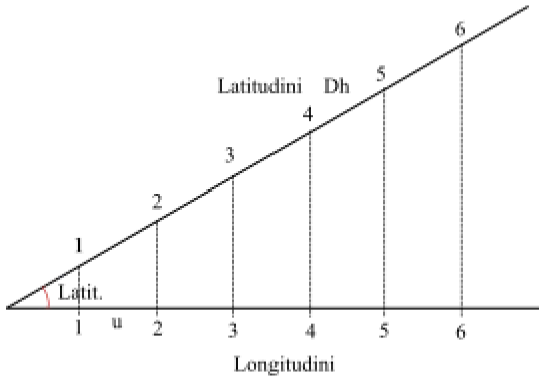
da cui si ricavano le coordinate cartesiane del punto di incontro

$$x = \frac{qb2 - qb1}{mb1 - mb2}$$

$$y = mb1x + qb1$$

Calcolo del Punto Nave
Occorre tenere presente che il diagramma cartesiano di un grafico di rette d’altezzza è a coordinate non omogenee, in quanto i valori in y rispetto ai valori in x sono espansi per la secante della Latitudine del punto stimato.
Per trasformare le coordinate cartesiane in differenza di Latitudine e di Longitudine si può operare in due modalità.

Primo modo
Si considera come modulo unitario **u** del grafico il primo di Longitudine (considerando implicitamente l'uso di una carta di Mercatore approssimata).



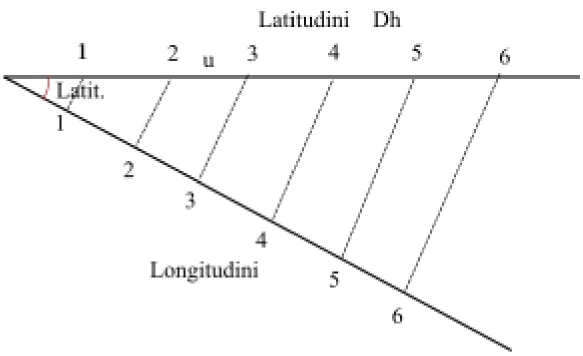
In tal caso le ascisse saranno di valore unitario ed il valore x rappresenta direttamente la scala delle differenze di Longitudine.
I valori in y saranno pari ad u/cos(Lat) e su tale coordinata, rappresentando il primo di arco di Latitudine, si potranno misurare le differenze di Latitudine, le distanze e quindi anche i Dh.
Le scale in uso nel grafico saranno dunque

$$x = u$$
$$y = u / \cos(Lat)$$

Nei calcoli illustrati precedentementemente il valore dei Dh delle rette d'altezza andrà quindi preventivamente moltiplicato per la secante della Latitudine.
Una volta eseguiti i calcoli e trovate le coordinate cartesiane del punto di incontro delle bisettrici, x e y, andranno trasformate rispettivamente in differenze di Longitudine e di Latitudine rispetto al punto stimato, effettuando l'operazione inversa alla precedente.
Avremo pertanto

$$DLat = y * \cos(Lat)$$
$$DLon = x$$

Secondo modo
Si considera come modulo unitario **u** del grafico il primo di Latitudine (considerando implicitamente l'uso di una piano nautico).



In tal caso le ordinate saranno di valore unitario ed il valore y rappresenta direttamente la scala delle differenze di Latitudine e su tale coordinata, rappresentando il primo di arco di latitudine, si potranno misurare le differenze di Latitudine, le distanze e quindi anche i Dh.

I valori in x saranno pari ad u*cos(Lat) e su tale coordinata, si misureranno le differenze di Longitudine.
Le scale in uso nel grafico saranno dunque

$$y = u$$
$$x = u * \cos(Lat)$$

Nei calcoli illustrati precedentementemente il valore dei Dh delle rette d’altezza andrà inserito direttamente come è, senza riduzioni né espansioni.
Una volta eseguiti i calcoli e trovate le coordinate cartesiane del punto di incontro delle bisettrici, x e y, andranno trasformate rispettivamente in differenze di Longitudine e di Latitudine rispetto al punto stimato, effettuando l’operazione inversa.
Avremo pertanto

$$DLat = y$$
$$DLon = x / \cos(Lat)$$

Le coordinate del Punto Nave saranno

$$Lat.Vera = Lat.Stim. + Dlat$$
$$Lon.Vera = Lon.Stim. + DLon$$

SCHEMA DI CALCOLO CON 4 RETTE D'ALTEZZA

1) Si mettono gli astri in ordine di azimut in modo da individuare le coppie di rette su cui lavorare

Punto stimato
Latitudine = 37° 11' S
Longitudine= 21° 59' E

	Azimut	Dh
Astro 1	86°,7	-4
Astro 2	176°	0,7
Astro 3	273°	6,3
Astro 4	359°,2	0,6

2) Determinazione dei coefficienti impliciti della prima coppia di rette d'altezza opposte tra loro

Equazione prima retta (astro 1)
sen(az)x+cos(az)y-Dh=0
a1 = sen(az1) = 0,99834
b1 = cos(az1) = 0,05756
c1 = Dh1 = - 4

Equazione seconda retta (astro 3)
sen(az)x+cos(az)y-Dh=0
a2 = sen(az3) = - 0,99863
b2 = cos(az3) = 0,05233
c2 = Dh3 = 6,3

3) Si calcolano i coefficienti espliciti della prima potenziale bisettrice della prima coppia
Equazione della prima bisettrice (con il secondo membro positivo)

$$mb1=\frac{a2-a1}{b1-b2} \qquad qb1=\frac{Dh1-Dh2}{b1-b2}$$

mb1A=((- 0,99863) – 0,99834) / (0,05756 - 0,05233) = -1,99697 / 0,00523 = - 381,82983
qb1A = (- 4 – 6,3) / (0,05756 - 0,05233) = - 10,3 / 0,00523 = - 1969,40726

4) Si calcolano i coefficienti espliciti della seconda potenziale bisettrice della prima coppia
Equazione della seconda bisettrice (con il secondo memro negativo)

$$mb2=\frac{-a2-a1}{b1+b2} \qquad qb2=\frac{Dh1-Dh2}{b1+b2}$$

mb1B = (- (- 0,99863) - 0,99834) / (0,05756 + 0,05233) = 0,00028 / 0,10989 = 0,00255
qb1B = (- 4 - 6,3) / (0,05756 + 0,05233) = - 10,3 / 0,10989 = - 93,7301

5) Coefficiente angolare azimut medio della prima coppia di rette
azMd = 90° – (86°,7 + 273°) / 2 = - 89°,85
mMed = tan(- 89°,85) = - 381,9709

6) Si confrontano i coefficienti angolari delle due bisettrici con quello relativo all'azimth medio
Si osserva che la prima bisettrice ha il coefficiente angolare concorde a quella dell'azimut medio, nonché la parte numerica intera identica.

mb1A= - 381,82983
mMed = - 381,9709

Si nota che i calcoli effettuati con una normale calcolatrice non danno risultati rigorosamente uguali.
Il confronto tra le parti intere ed i loro segni ci permette comunque di risolvere l'ambiguità.
La bisettrice della prima coppia di rette ha pertanto equazione

y = - 381,82791 x - 1969,40726

7) Determinazione dei coefficienti impliciti della seconda coppia di rette d'altezza opposte tra loro

Equazione terza retta (astro 2)
sen(az)x+cos(az)y-Dh=0
a1 = sen(az2) = 0,06975
b1 = cos(az2) = - 0,99756
c1 = Dh2 = 0,7

Equazione quarta retta (astro 4)
sen(az)x+cos(az)y-Dh=0
a2 = sen(az4) = - 0,01396
b2 = cos(az4) = 0,9999
c2 =Dh4 = 0,6

8) Si calcolano i coefficienti espliciti della prima potenziale bisettrice della seconda coppia
Equazione della prima bisettrice (con secondo membro positivo)

$$mb2 = \frac{a2 - a1}{b1 - b2} \qquad qb2 = \frac{Dh1 - Dh2}{b1 - b2}$$

mb2A = (- 0,01396 – 0,06975) / (- 0,99756 - 0,9999) = - 0,08731 / - 1,99746 = 0,04371
qb2A = (0,7 – 0,6) / (- 0,99756 - 0,9999) = 0,1 / - 1,99746 = - 0,05006

9) Si calcolano i coefficienti espliciti della seconda potenziale bisettrice della seconda coppia
Equazione della seconda bisettrice (con il secondo membro negativo)

$$mb2 = \frac{-a2 - a1}{b1 + b2} \qquad qb2 = \frac{Dh1 - Dh2}{b1 + b2}$$

mb2B = (- (- 0,01396) - 0,06975) / (- 0,99756 + 0,9999) = - 0,05579 / 0,00234 = - 23,84188
qb2B = (0,7- 0,6) / (- 0,99756 + 0,9999) = 0,1 / 0,00234 = 42,735

10) Coefficiente angolare azimut medio della seconda coppia di rette
azMd = 90° – (176° + 359°,2) / 2 = – 177°,6
mMed = tan(- 177°,6) = 0,0419

11) Si confrontano i coefficienti angolari delle due bisettrici con quello relativo all'azimth medio
Si osserva che la prima bisettrice ha il coefficiente angolare concorde a quella dell'azimut medio, nonché la parte numerica intera identica.

Mb2A= 0,04371
mMed = 0,0419

Si nota che i calcoli effettuati con una normale calcolatrice non danno risultati rigorosamente uguali.
Il confronto tra la parte intera ed il suo segno ci permettono comunque di risolvere l'ambiguità.
La bisettrice della seconda coppia di rette è pertanto

y= 0,04371x-0,05006

12) Si determina il punto di intersezione tra le due bisettrici

y = - 381,82791 x - 1969,40726
y= 0,04371x - 0,05006

mb1 = - 381,82791
mb2 = 0,04371
qb1 = - 1969,40726
qb2 = - 0,05006

$$x=\frac{qb2-qb1}{mb1-mb2} \qquad y=mb1x+qb1$$

x = (- 0,05006 - - 1969,40726) / (- 381,82791 - 0,04371) = 1969,3572 / - 381,87162 = -5,15712
y = - 381,82791 * - 5,15712 + - 1969,40726 = 1969,13235 – 1969,40722 = - 0,275

x = - 5.15712
y = - 0,275

13) Si trasformano le coordinate cartesiane del punto in differenze di Latitudine e Longitudine

DLat = y = - 0,3
DLon = x / cos(Lat) = - 5,15712 / cos(37,18) = - 6,5

14) Coordinate geografiche del Punto Nave

Lat. = 37° 11’.3 S
Longit. = 21° 52’.5 E